RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ
MATHEMATICS AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: https://doi.org/10.36719/2789-6919/56/107-115

Günay Salmanova
Gəncə Dövlət Universiteti
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
https://orcid.org/0009-0002-4502-7349
gunay-salmanova@mail.ru

Polinomial dəstələrdə baş operatorun spektrinin ixtiyari yerləşməsi

Xülasə

Elmi iş, polinomial operator dəstələrində baş operatorun spektrinin ixtiyari yerləşməsi probleminin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsi funksional analiz və riyazi fizikanın mühüm sahələrindən biri olub, diferensial və inteqral tənliklərin həllində geniş tətbiq olunur. Operatorun spektri onun məxsusi qiymətlərindən ibarət olub, operatorun struktur və dinamik xüsusiyyətlərini müəyyən edən əsas anlayışlardan biridir.

İşdə polinomial operator dəstələri üçün spektral xüsusiyyətlər araşdırılmış, baş operatorun spektrinin kompleks müstəvidə ixtiyari şəkildə yerləşməsi üçün kafi şərtlər müəyyən edilmişdir. Tədqiqat zamanı operator dəstələrinin spektral xassələri, məxsusi qiymət və məxsusi vektorların davranışı, həmçinin, spektral ayrılış və spektral parametrdən asılılıq məsələləri öyrənilmişdir.

Araşdırmada göstərilmişdir ki, müəyyən şərtlər daxilində polinomial operator dəstələrinin spektri kompleks müstəvidə əvvəlcədən verilmiş çoxluqlarda yerləşdirilə bilər. Bu nəticələr operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsinin inkişafına töhfə verməklə yanaşı, diferensial operatorların və riyazi fizika modellərinin spektral analizində də mühüm rol oynayır. Spektral problemlər həm düz, həm də tərs spektral məsələlərin öyrənilməsində əsas metodoloji baza rolunu oynayır.

Alınmış nəticələr operator nəzəriyyəsi, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi və riyazi fizikanın müxtəlif problemlərinin həllində tətbiq oluna bilər.

Açar sözlər: *polinomial operator dəstəsi, baş operator, spektr, spektral analiz, məxsusi qiymət, operator nəzəriyyəsi*

Gunay Salmanova
Ganja State University
PhD in Mathematics
https://orcid.org/0009-0002-4502-7349
gunay-salmanova@mail.ru

Arbitrary Placement of the Spectrum of the Leading Operator in Polynomial Operator Pencils

Abstract

Scientific work is devoted to the study of the arbitrary placement of the spectrum of the leading operator in polynomial operator pencils. The spectral theory of operator pencils is one of the important areas of functional analysis and has wide applications in the theory of differential equations and mathematical physics. The spectrum of an operator, which consists of its eigenvalues, is one of the fundamental concepts determining the structural and dynamic properties of operators.

In this work, the spectral properties of polynomial operator pencils are investigated and sufficient conditions for the arbitrary placement of the spectrum of the leading operator in the complex plane are established. The study examines the behavior of eigenvalues and eigenvectors, spectral decomposition, and the dependence of spectral characteristics on parameters within operator pencils.

It is shown that under certain conditions the spectrum of polynomial operator pencils can be located in previously specified subsets of the complex plane. The obtained results contribute to the development of spectral theory of operator pencils and can also be applied in the spectral analysis of differential operators and various models of mathematical physics.

The results obtained in this research may be used in operator theory, the theory of differential equations, and in solving various problems arising in mathematical physics.

Keywords: *polynomial operator pencil, leading operator, spectrum, spectral analysis, eigenvalues, operator theory*

Giriş

Operatorun spektri anlayışı, operatorun məxsusi qiymətlərini və onların yerləşmə xüsusiyyətlərini əhatə edir. Spektrin kompleks müstəvidə yerləşməsi operator dəstələrinin davranışını, sabitliyini və həllərin strukturunu müəyyən edən əsas amillərdəndir. Buna görə də baş operatorun spektrinin ixtiyari şəkildə yerləşməsi probleminin öyrənilməsi spektral nəzəriyyənin mühüm məsələlərindən biri hesab olunur. Operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsi funksional analiz və riyazi fizikanın mühüm sahələrindən biri olub, diferensial və inteqral tənliklərin həllində geniş tətbiq olunur. Operatorun spektri onun məxsusi qiymətlərindən ibarət olub, operatorun struktur və dinamik xüsusiyyətlərini müəyyən edən əsas anlayışlardan biridir. Bu məsələ ilə bağlı müəyyən araşdırmalar aparılmış (Dzhabarzade, 1964; Dzhabarzade, 2004; Dzhabarzade, 1999; Dzhabarzade və Salmanova, 2015; Gasymov, 1971; Keldysh, 1971; Salmanova, 2010), ciddi elmi nəticələr (Dzhabarzade, 1998; Dzhabarzade, 1999; Gasymov, 1972; Salmanova, 2010; Salmanova, 2009) əldə edilmişdir.

Tədqiqat

Seperabel Hilbert H fəzasında

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 B + \lambda^2 A_2 B^2 + \ldots + \lambda^{n-1} A_{n-1} B^{n-1} + \lambda^n B^n \tag{1}$$

operator dəstəsinə baxılır. Burada, A_i, B operatorları $H, \lambda \in C$ fəzasında təsir edir və tamamilə kəsilməz operatorlardır.

(1) dəstəsinin λ^0 məxsusi qiymətinə uyğun olan öz-özünə qoşma məxsusi vektorların kanonik sistemi dedikdə, aşağıdakı xassələri olan $\left(z_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}{}_r$, $k = 1,2,...$ elementlər sistemi başa düşülür:

a) $z_0^{(k)}$ elementləri, $M(\lambda^0)$ məxsusi altfəzanın bazisini yaradır;

b) $z_0^{(1)}$ - tərtibi, maksimum $p_1 + 1$ olan məxsusi vektordur;

c) $z_0^{(k)}$- $z_0^{(1)},...,z_0^{(k-1)}$ vektorları ilə xətti ifadə olunmayan və tərtibləri cəmi maksimum $p_k + 1$ olan məxsusi vektordur;

d) $\left(z_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}{}_r$ $(k = 1,2,...)$ sistemindən götürülmüş xətti asılı olmayan $z_0^{(1)},..., z_0^{(s)}$ elementləri, hər bir qeyd olunmuş k, $k = 1,2,...,s$ qiymətlərdə öz-özünə qoşma vektorların zəncirini əmələ gətirir. $p_1 + p_2 + \ldots + p_s + 1$ cəminə, λ^0 məxsusi ədədinin tərtibi deyilir.

Tutaq ki, B normal operatordur, $KerB = \{\theta\}$. B operatorunun xarakteristik ədədlərinin (məxsusi ədədlərə tərs olan ədədlər) modulunun artan ardıcıllığını μ_k ilə işarə edək. B operatorunun xarakteristik ədədlərinin, modulun artımına uyğun olan məxsusi vektorların tərtibinə uyğun nömrələndiyini qəbul edək.

Tamamilə kəsilməz normal B operatoru və $p > 0$ olduqda B^p alt operatoru üçün $B^p f = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^p e^{ip\theta_j} (f, \varphi_j) \varphi_j$ başa düşülür. Burada, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ - B operatorunun $\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, $(\theta_j < 2\pi)$ məxsusi qiymətlərinə uyğun olan məxsusi vektorlarının ortanormal ardıcıllığıdır.

Teorem 1. Tutaq ki, aşağıdakı şərtlərdən heç olmasa biri ödənilir:

1) $0 < p < 2, \lim\limits_{k\to\infty} k\mu_k^{-\frac{p}{2}} = 0$, $A_i B^{-p}$ operatorları məhduddur.

2) $0 < p < 1, \lim\limits_{k\to\infty} k\mu_k^{-\frac{p}{2}} < \infty$, $A_i B^{-p}$ operatorları tamam kəsilməzdir.

Onda (1) dəstəsinin müxtəlif məxsusi qiymətlərini $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ ardıcıllığında elə yerləşdirmək olar ki, hər hansı artan natural ədədlər ardıcıllığı və $f_j \in R_{B^j}$ şərtini ödəyən $f_1, \dots, f_{n-1}$ elementləri üçün

$$f_j = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n_{i-1}}^{n_i - 1} \sum_{s=0}^{m_{kr}-1} \sum_{r=0}^{P_{s_k}-1} a_{sr}^{(k)} Z_{jsr}^{(k)} \right)$$

bərabərliyi var, burada p_{s_k} -müxtəlif məxsusi funksiyaların sayı, m_{kr} - Z_{00r} məxsusi funksiyasının qatlığıdır. $\left\{ Z_{0sk}^{(k)} \right\}$ - λ_k məxsusi ədədinə uyğun kanonik sistemdir.

İsbatı. $\lim\limits_{k\to\infty} k\mu_k^{-\frac{p}{2}} = 0$ şərti göstərir ki, elə s_k natural ədədlər ardıcıllığı vardır ki, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{s_k}{\mu_{s_k}^{\frac{p}{2}}} = 0$ ödənilir. Göstərək ki, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{s_k}{\mu_{s_k}^{\frac{p}{2}}} = 0$ şərtindən $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mu_{t_k}^{1-\frac{p}{2}}}{\Delta\mu_{t_k}} \to 0$ alınır. Doğurdan da, tutaq ki, $\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}} - \mu_{t_k}^{\frac{p}{2}} = \max\limits_{0 \le i \le s_k - 1} \left(\mu_{i+1}^{\frac{p}{2}} - \mu_i^{\frac{p}{2}} \right)$, $(\mu_0 = 0)$,

$\Delta\mu_{t_k} = \mu_{t_k+1} - \mu_{t_k}$. Belə ki, $\dfrac{\mu_{t_k+1}}{\mu_{t_k}} \to \infty$, onda $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\dfrac{\mu_{t_k+1}}{\mu_{t_k}} - 1}{\left(\dfrac{\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}}}{\mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}} - 1\right)} = \dfrac{2}{p}$. Beləliklə,

$$0 \leftarrow \frac{s_k}{\mu_{s_k}^{\frac{p}{2}}} > \frac{s_k}{s_k\left(\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}} - \mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}\right)} = \frac{1}{\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}} - \mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}} = \frac{\dfrac{\mu_{t_k+1}}{\mu_{t_k}} - 1}{\mu_{t_k}^{\frac{p}{2}-1}\Delta\mu_{t_k}\left(\dfrac{\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}}}{\mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}} - 1\right)} \geq \frac{2}{p}\frac{\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}}$$

alınır. Axırıncı ifadədən isə $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\mu_{t_k}^{1-\frac{p}{2}}}{\Delta\mu_{t_k}} = 0$ olduğu alınır. Əgər teorem 1- b) şərti ödənilərsə, yəni $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{s_k}{\mu_{s_k}^{\frac{p}{2}}} < \infty$ olarsa, onda aşağıdakı qiymətləri alarıq:

$$\infty > \frac{s_k}{\mu_{s_k}^{\frac{p}{2}}} > \frac{s_k}{s_k\left(\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}} - \mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}\right)} = \frac{1}{\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}} - \mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}} = \frac{\dfrac{\mu_{t_k+1}}{\mu_{t_k}} - 1}{\mu_{t_k}^{\frac{p}{2}-1}\Delta\mu_{t_k}\left(\dfrac{\mu_{t_k+1}^{\frac{p}{2}}}{\mu_{t_k}^{\frac{p}{2}}} - 1\right)} \geq \frac{2}{p}\frac{\mu_{t_k}^{1-\frac{p}{2}}}{\Delta\mu_{t_k}},$$

Bu isə o deməkdir ki, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\mu_{t_k}^{1-\frac{p}{2}}}{\Delta\mu_{t_k}} < \infty$.

Tutaq ki, x_0 - $L(\lambda)$ operatorunun məxsusi vektorudur, onda aşağıdakı bərabərliklər sistemi ödəninlir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_{n-1}x_{n-1} + \lambda B_{n-1}x_{n-1}\\
x_1 &= \lambda Bx_0\\
x_2 &= \lambda Bx_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= \lambda Bx_{n-2}
\end{aligned} \tag{2}$$

H fəzasının n sayda təkrarının düz cəmində, yəni, $\overline{H}$ fəzasında (2) sistemi

$$\overline{x} = \overline{A}\overline{x} + \lambda \overline{B}\overline{x} \tag{3}$$

tənliyinin köməkliyi ilə yazılır, $\overline{A}$ və $\overline{B}$ operatorları isə operator matrislərin köməyi ilə verilir:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \\ 0 & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0. \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & B \\ B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots B & 0 \end{pmatrix}$$

Γ_K qapalı konturlara baxaq. Bunlar, $\rho_k = \dfrac{\mu_{t_k} + \mu_{t_k+1}}{2}$ $(k = 1,2,\dots)$ radiuslu çevrələrdir. Belə ki, B operatoru, hər bir $\ker B = \{\theta\}$ üçün tamamilə kəsilməz normal operatordur. Onda onun məxsusi və qoşulmuş vektorlar sistemi H fəzasının bazisini yaradır. $\ker B = \{\theta\}$ şərtindən alınır ki, $Ker\overline{B} = \{\theta\}$. Əksini fərz edək: tutaq ki, $Ker\overline{B} \neq \{\theta\}$. Onda elə sıfırdan fərqli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{H}$ element var ki, $\overline{B}x = \{\theta\}$ olur. Bu halda, heç olmasa bir sıfırdan fərqli $x_i \in H$, $1 \le i \le n$ element üçün $Bx_i = 0$ bərabərliyi ödənməlidir. Bu isə mümkün deyildir, çünki $KerB = \{\theta\}$

şərtinə ziddir. (3) tənliyinə

$$\overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & \dots & B^{-1} \\ B^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

normal operatoru ilə təsir edək. $\overline{B}^{-1}$ operatorunun məxsusi qiymətləri teoremin şərtlərini ödəyir və $Ker\overline{B}^{-1} = \{\theta\}$. İndi $\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A}$ operatoruna baxaq, burada $\overline{B}^{-1}$, asılı olmayan (baş) hissə, $\overline{B}^{-1}\overline{A}$ isə, $\overline{B}^{-1}$ operatorundan asılı olan hissədir.

Aşağıdakı bərabərlik doğrudur

$$\left(\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A} - \lambda\overline{E}\right)^{-1} = \left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\left(\overline{E} - \overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\,\overline{E}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Buradan, alınır:

$$\overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1}-\lambda\overline{E}\right)^{-1}=(\overline{B}^{-1}\overline{A})(\overline{B}^{-1})^{p-1}(\overline{B}^{-1})^{1-p}(\overline{B}^{-1}-\lambda\overline{E})^{-1}$$

$$\left\|\overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1}-\lambda\overline{E}\right)^{-1}\right\|\leq\left\|\overline{B}^{-p}\overline{A}\right\|\max_{\lambda_i}\frac{|\lambda_i|^{1-p}}{|\lambda_i-\lambda|}$$

Tutaq ki, teoremin a) şərti ödənilir. $|\lambda_i|>|\lambda|$ olduqda $\Gamma_k\ (\lambda\in\Gamma_k)$ konturlarında alırıq:

$$\frac{1}{|\lambda_i|^{p-1}|\lambda_i-\lambda|}=\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_i-\lambda||\lambda_i|^p}=\frac{\mu_{t_k}+\frac{\Delta\mu_{t_k}}{2}+\left(|\lambda_i|-|\lambda|\right)}{|\lambda_i|^p|\lambda_i-\lambda|}\leq\frac{\mu_{t_k}+\frac{\Delta\mu_{t_k}}{2}+\left(|\lambda_i|-|\lambda|\right)}{\mu_{t_k}^p|\lambda_i-\lambda|}\leq\frac{2\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}}+\frac{2}{\mu_{t_k}^p}$$

Beləliklə, $|\lambda_i|>|\lambda|$ və $\lambda\in\Gamma_k,\ k=1,2,\ldots$ olduqda

$$\frac{1}{|\lambda_i|^{p-1}|\lambda_i-\lambda|}=\frac{|\lambda_i|^{1-p}}{|\lambda_i-\lambda|}\leq\frac{2\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Əgər $1<p<2$ olarsa, onda bütün $\lambda\in\Gamma_k$ qiymətləri üçün aşağıdakı ifadə doğrudur:

$$\frac{1}{|\lambda_i|^{p-1}|\lambda-\lambda_i|}\leq\frac{1}{|\overline{\lambda}_i|^{p-1}|\lambda-\overline{\lambda}_i|},$$

burada $\overline{\lambda}_i$ -kompleks ədəddir və modulu $|\lambda_i|$-ə bərabərdir.

İndi $\dfrac{1}{|\overline{\lambda}_i|^{p-1}|\lambda-\overline{\lambda}_i|}$ ifadəsinin ən böyük qiymətini tapaq. Bunun üçün $\dfrac{1}{|\overline{\lambda}_i|^{p-1}|\lambda-\overline{\lambda}_i|}$ ifadəsi ilə üst-üstə düşən $f(x)=\dfrac{1}{x^{p-1}\left(|\lambda|-x\right)}$, $\left(\mu_1\leq x\leq\mu_{t_k}\right)$ funksiyasına baxaq. Burada, $x=|\overline{\lambda}_i|$.

$f(x)$ funksiyası, x_k nöqtəsində özünün ən kiçik qiymətini alır. Bütün k-lar üçün k =1-dən başlayaraq aşağıdakı ifadə ödənilir:

$$\mu_1\leq x_k\leq\frac{p-1}{p}|\lambda|\leq\mu_{t_k}.$$

Onda $\left[\mu_1, \frac{p-1}{p}|\lambda|\right]$ parçasında funksiya azalır, $\left[\frac{p-1}{p}|\lambda|, \mu_{t_k}\right]$ parçasında isə artır. Belə ki, $f(\mu_1) = \frac{1}{\mu_1^{p-1}\left(|\lambda| - \mu_1\right)}$, $f(\mu_{t_k}) = \frac{1}{\mu_{t_k}^{p-1}\left(|\lambda| - \mu_{t_k}\right)} = \frac{2\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}}$,

Bu zaman $1 \le p < 2$ olduqda $\left\|\overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\right\| < \alpha_1\left(\frac{1}{\mu_{t_k}} + \frac{\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}}\right)$, $0 < p < 1$ olduqda isə $\left\|\overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\right\| < \alpha_2\left(\frac{1}{\mu_{t_k}^{p}} + \frac{\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}}\right)$, $(\lambda \in \Gamma_k)$ alırıq. α_1, α_2 ədədləri k -dan asılı deyildir. Nəticədə alırıq ki, $0 < p < 2$ olduqda alarıq:

$$\left\|\overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\right\| < \alpha_3\left(\frac{1}{\mu_{t_k}^{p}} + \frac{\mu_{t_k}^{1-p}}{\Delta\mu_{t_k}} + \frac{1}{\mu_{t_k}}\right), (\lambda \in \Gamma_k), \tag{4}$$

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1} d\lambda, \quad \overline{P}_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\left(\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A} - \lambda\overline{E}\right)^{-1} d\lambda,$$

operatorlarını götürək. Burada, P_k- $\overline{B}^{-1}$ operatorunun bütün məxsusi qiymətlərinə uyğun məxsusi altfəzasına ortoqonal proyeksiyalanmışdır, $\overline{P}_k$-isə $\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A}$ operatorunun bütün məxsusi qiymətlərinə uyğun köklü altfəzasına ortoqonal proyeksiyalanmışdır.

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1} - \left(\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A} - \lambda\overline{E}\right)^{-1} = \\
&\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1} - \left(\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)\left(\overline{E} - \overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} = \\
&= \left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\left(\overline{E} - \overline{B}^{-1}\overline{A}\left(\overline{B}^{-1} - \lambda\overline{E}\right)^{-1}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

(1)-ə görə alırıq ki, əgər $k \to \infty$ olarsa, onda $\left\|P_k - \overline{P}_k\right\| \to 0$ olar.

$\overline{B}^{-1}$ operatorunun məxsusi altfəzalarını ortoqonal cəminə otroqonal proyektoru Q_k ilə, $\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A}$ operatorunun köklü altfəzalarının düz cəminə ortoqonal olan proyektoru isə $\overline{Q}_k$ ilə işarə edək. Onda hər zaman elə Γ_k konturlar ardıcıllığı götürmək olar ki, $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\overline{Q}_k - Q_k\right\|^2 < 1$ olsun. Başqa sözlə, $\overline{B}^{-1} - \overline{B}^{-1}\overline{A}$ operatorunun kök vektorlar sistemi, $\overline{H}$ fəzasında altfəzalardan ibarət Bari bazisi əmələ gətirir. Bu isə o deməkdir ki, teorem, $B^{-1} - B^{-1}A$ operatoru üçün doğrudur. Yəni, isbat etdik ki, $\overline{B}^{-1}-\overline{B}^{-1}\overline{A}$ operatorunun məxsusi qiymətlərini $\{\lambda_n\}_1^\infty$ ardıcıllığında elə yerləşdirmək olar ki, hər hansı $\{n_j\}_{j=1}^\infty$; $(n_o=1)$ artan natural ədədlər ardıcıllığı üçün

$$\Re_j = G_{\overline{A}+\lambda\overline{B}}(\lambda_{n_{j-1}})\oplus\ldots\oplus G_{\overline{A}+\lambda\overline{B}}(\lambda_{n_j-1})$$

altfəzalar ardıcıllığı $\overline{H}$ fəzasında Bari bazisi müəyyən edir.

Teoremin $B^{-1}-B^{-1}A$ operatoru üçün doğruluğu, onun $\overline{A}+\lambda\overline{B}-\lambda\overline{E}$.operatoru üçün də ödənildiyini göstərir.

(1) bərabərliklər sistemindən alınır ki, $\overline{A}+\lambda\overline{B}-\lambda\overline{E}$ operatorunun λ_0 məxsusi qiymətinə uyğun olan $\overline{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ məxsusi vektorunun birinci koordinatı, $L(\lambda)$ operatorunun həmin məxsusi qiymətinə uyğun olan x_0 məxsusi vektoru ilə üst-üstə düşür. Onda ixtiyari $\overline{y}=(y_0,\ldots,y_{n-1})\in D_{\overline{B}^{-1}}$ element üçün

(2)
$$\overline{y}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n_{i-1}}^{n_i-1}\sum_{s=0}^{m_k-1}\sum_{r=0}^{p_k} a_{s,r}^{(k)}\overline{y}_{s,r,i}^{(k)}\right),$$

ayrılışının mənası vardır. Burada, $\overline{y}_{s,r}^{(k)}=\left(y_{0,s,r}^{(k)},y_{1,s,r}^{(k)},\ldots,y_{n-1,s,r}^{(k)}\right)\in\overline{H}$ vektoru, λ_k məxsusi ədədinə uyğun olan $\overline{y}_{0,r}^{(k)}$ məxsusi vektora s -inci qoşulmuş vektordur.

Nəticə

İşdə operator dəstələrində baş operatorun spektrinin yerləşməsi məsələsi araşdırılmış və onun əsas spektral xüsusiyyətləri öyrənilmişdir. Həmçinin, operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsinə aid əsas anlayışlar təhlil edilmiş, baş operatorun spektrinin kompleks müstəvidə yerləşməsini müəyyən edən şərtlər nəzərdən keçirilmişdir. Bu nəticələr operator dəstələrinin spektral nəzəriyyəsinin inkişafına töhfə verməklə yanaşı, diferensial operatorların və riyazi fizika modellərinin spektral analizində də mühüm rol oynayır. Spektral problemlər həm düz, həm də tərs spektral məsələlərin öyrənilməsində əsas metodoloji baza rolunu oynayır.

Alınmış nəticələr operator nəzəriyyəsi, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi və riyazi fizikanın müxtəlif problemlərinin həllində tətbiq oluna bilər.

Ədəbiyyat

1. Dzhabarzade, R.M. (1964). O razlozhenii po s.p. ehlementam operatora, polinomial'no zavisyashchego ot parametra. *Uchenye zapiski. Azerb.Univer. Ser. fiz-mat. nauk, 3*, 75–81.
2. Dzhabarzade, R.M. (2004). Dvukhparametricheskaya sistema operatorov, polinomial'no zavisyashchaya ot spektral'nykh parametrov. *Doklady NANA, 9*(1–2), 9–171.
3. Dzhabarzadeh, R.M. (1998). Spectral theory of two parameter system in finite-dimensional space. *Transactions of AS Azerbaijan, 18*(3–4), 12–18.
4. Dzhabarzadeh, R.M. (1999). Spectral theory of multiparameter system of operators in Hilbert space. *Transactions of Sciences of Azerbaijan, 19*(1–2), 33–40.
5. Dzhabarzadeh, R.M., & Salmanova, G.H. (2015). On Eigenvalues of Nonlinear Operator Pencils with Many parameters. *Open Science Journal of Mathematics and Application, 3*(4), 96–100.

6. Dzhabarzadeh, R.M. (1999). The multiparameter analoque of the Resolvent operator. *Proceeding of IMM of Azerbaijan AS, 11–19*(38), 38–44.
7. Gasymov, M.G. (1971). K teorii polinomial'nykh puchkov operatorov. *DAN SSSR, 199*(4), 747–750.
8. Gasymov, M.G. (1972). O kratnoi polnote chasti sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov polinomial'nykh operatornykh puchkov. *Izv. AN Arm. SSR, ser.matem., 6*(2–3), 131–147.
9. Keldysh, M.V. (1971). O polnote sobstvennykh funktsii nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh lineinykh operatorov. *UMN, 27*(4), 15–17.
10. Salmanova, G.G. (2010). K spektral'noi teorii nesamosopryazhennykh dvukhparametricheskikh sistem. *Doklady Natsional'noi Akademii Nauk Azerbaidzhana, 66*(4), 3–8.
11. Salmanova, G.G. (2009). Spektral'nye voprosy polinomial'nykh operatornykh puchkov. *Vestnik Bakinskogo Universiteta. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk, 4*, 59–64
12. Salmanova, G.G. (2010). K spektral'noi teorii polinomial'nykh puchkov i dvukhparametricheskaya zadacha. *Telavskii gosudarstvennyi universitet. TRANSACTIONS, 1*, 34–47.

Daxil oldu: 29.11.2025
Qəbul edildi: 12.03.2026